

The background features a dark blue gradient with faint, light blue circular diagrams and a scale. The scale is a large arc on the left side, with numerical markings from 140 to 260 in increments of 10. Several circular diagrams with arrows indicate paths or trajectories, some solid and some dashed, set against a backdrop of small white stars.

# TRAJECTOIRES DES PHOTONS À PROXIMITÉ DES TROUS NOIRS

NICOLAS FLEURY

# SOMMAIRE

INTRODUCTION AUX TROUS NOIRS

MÉCANIQUE CLASSIQUE

RELATIVITÉ GÉNÉRALE – SYMÉTRIE SPHÉRIQUE

RELATIVITÉ GÉNÉRALE – SYMÉTRIE AXIALE

Trajectoires des photons à proximité des trous noirs

# INTRODUCTION AUX TROUS NOIRS

$$\Xi = \frac{GM}{c^2 R}$$

Corps	Masse $M_{\odot}$	Rayon R km	Densité $\rho$ kg/m <sup>3</sup>	Paramètre de compacité $\Xi$
Terre	$3 \times 10^{-6}$	$6 \times 10^3$	$5 \times 10^3$	$10^{-10}$
Soleil	1	$7 \times 10^5$	$10^3$	$10^{-6}$
naine blanche	0,1 à 1,4	$\approx 10^4$	$\approx 10^{10}$	$10^{-4}$ à $10^{-3}$
étoile à neutrons	1 à $\approx 3$	$\approx 10$	$\approx 10^{18}$	$\approx 0,2$
trou noir stellaire	$> \approx 3$	9 (M = 3M <sub>⊙</sub> )	$2 \times 10^{18}$	0,5
trou noir massif	$10^9$	20 UA	20	0,5

Note : le proton de densité  $\rho = 5 \times 10^{17}$  kg/m<sup>3</sup> n'est pas un trou noir car sa compacité  $\Xi \approx 10^{-39}$ .

Trajectoires des photons à proximité des trous noirs

## MÉCANIQUE CLASSIQUE (NEWTON)

Conservation du moment cinétique du photon  $\Rightarrow$  conique d'équation ( $u = \frac{1}{r}$ , phase  $\varphi$ ):

$$u(\varphi) = \frac{GM}{K^2} (1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)) \quad G \text{ constante gravitationnelle, } M \text{ masse du trou noir}$$

$K$  moment cinétique du photon par unité de masse,  $e$  excentricité et  $\varphi_0$  axe de symétrie

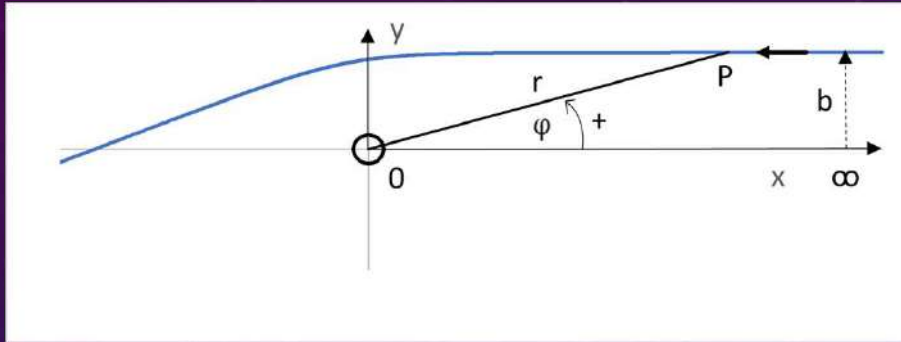
$$\text{Conservation de l'énergie mécanique } E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GmM}{r} = \frac{(GmM)^2}{2mK^2} (e^2 - 1)$$

$E_m > 0 \Leftrightarrow e > 1 \Rightarrow$  branche d'hyperbole

$E_m = 0 \Leftrightarrow e = 1 \Rightarrow$  parabole

$E_m < 0 \Leftrightarrow e < 1 \Rightarrow$  ellipse (si  $e = 0 \Rightarrow$  cercle  $R = \frac{GM}{c^2}$ ,  $c$  vitesse de la lumière dans le vide)

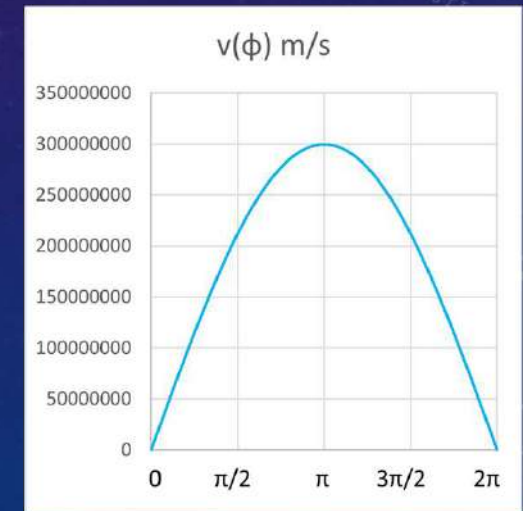
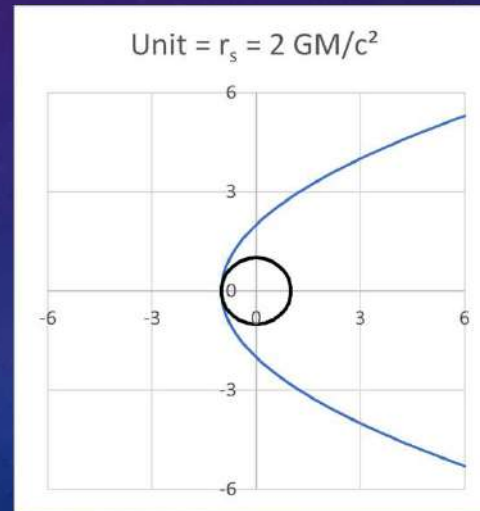
# MÉCANIQUE CLASSIQUE (NEWTON)



$b$  paramètre d'impact  $\Rightarrow K = v_{\infty} b$

Cas d'un photon émis depuis la surface d'un objet massif de rayon  $R$  :

$$v_{\infty} = c \sqrt{1 - \frac{R_s}{R}} \quad \text{avec } R_s = \frac{2GM}{c^2}$$



Trajectoires des photons à proximité des trous noirs



# RELATIVITÉ GÉNÉRALE – SYMÉTRIE SPHÉRIQUE (SCHWARZSCHILD)

Genre lumière  $\Rightarrow$  tenseur métrique (carré de la distance élémentaire entre 2 points) = 0

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 + (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) = 0$$

avec G constante gravitationnelle, M masse du trou noir, c vitesse de la lumière dans le vide et  $(ct, r, \theta, \varphi)$  coordonnées de Schwarzschild

Conservation de  $\varepsilon$  (énergie du photon) et de  $l$  (moment cinétique du photon)

$$\Rightarrow \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \sqrt{R_s u^3 - u^2 + \frac{1}{b^2}} \quad \text{avec } R_s = \frac{2GM}{c^2} \text{ et } b = c \frac{l}{\varepsilon} \text{ (paramètre d'impact)}$$

Dérivation  $\Rightarrow \frac{d^2 u}{d\varphi^2} = \frac{3R_s}{2} u^2 - u$  et obtention de  $u(\varphi)$  par double intégration

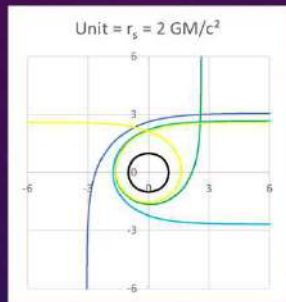
Valeur critique du paramètre d'impact :  $b_{crit} = \frac{3\sqrt{3}}{2} R_s (\approx 2,598 R_s)$

Hauteur critique d'impact :  $\tan^{-1} L_{crit} = \frac{R_s}{b_{crit}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow L_{crit} \approx 21,1^\circ$

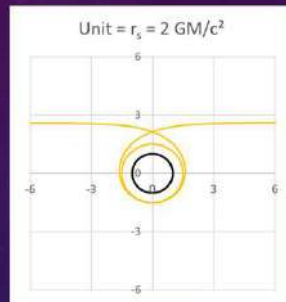
Trajectoires des photons à proximité des trous noirs

# RELATIVITÉ GÉNÉRALE – SYMÉTRIE SPHÉRIQUE (SCHWARZSCHILD)

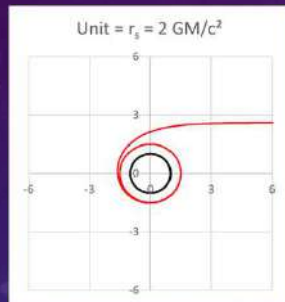
Les trajectoires des photons sont dans un plan (par convention  $\theta = \frac{\pi}{2}$ )



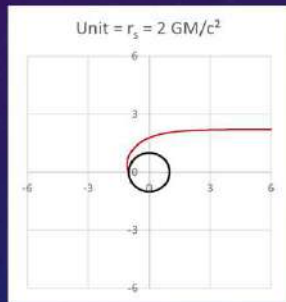
$b > b_{crit}$



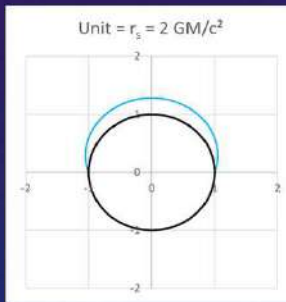
$b > b_{crit}$



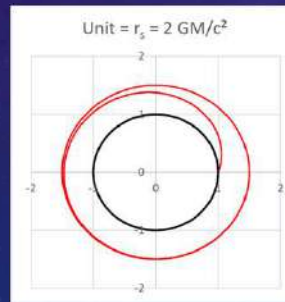
$b = b_{crit}$



$b < b_{crit}$

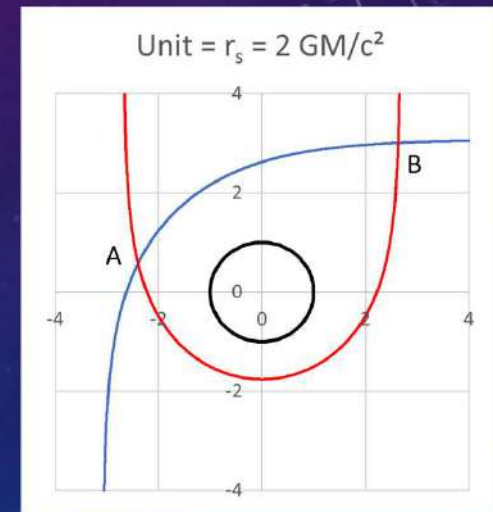


$b > b_{crit}$



$b = b_{crit}$

Orbite circulaire  
de rayon  $\frac{3R_s}{2}$   
 $\Rightarrow$  sphère de photons

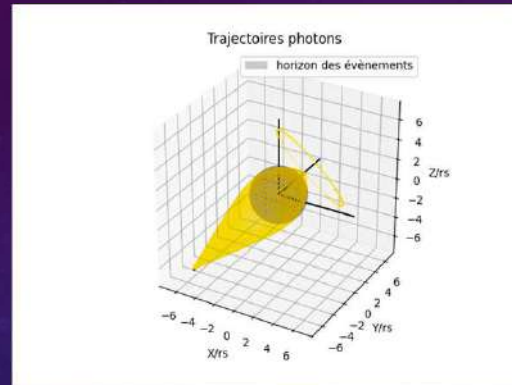


Deux géodésiques reliant  
un point A et un point B

Trajectoires des photons à proximité des trous noirs

# RELATIVITÉ GÉNÉRALE – SYMÉTRIE SPHÉRIQUE (SCHWARZSCHILD)

Anneau d'Einstein



Nappe de photons issus de

$$3R_S, \varphi = 60^\circ, \theta = 60^\circ$$

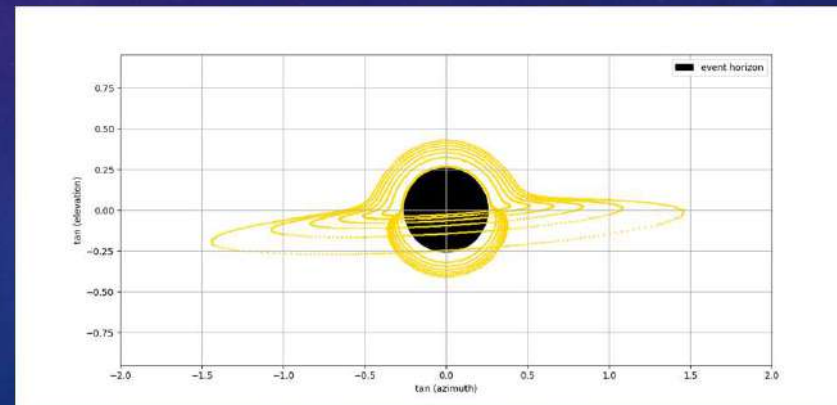
et reçus en

$$10R_S, \varphi = -120^\circ, \theta = -60^\circ$$

⇒ anneau d'Einstein

Image du disque d'accrétion

Cercles d'accrétion  $3R_S$  à  $8R_S$



Trajectoires des photons à proximité des trous noirs



# RELATIVITÉ GÉNÉRALE – SYMÉTRIE AXIALE (KERR)

Genre lumière  $\Rightarrow$  tenseur métrique (carré de la distance élémentaire entre 2 points) = 0

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GMr}{c^2 \Sigma} \right) c^2 dt^2 - \frac{4GMa r \sin^2 \theta}{c^2 \Sigma} c dt d\varphi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left( r^2 + a^2 + \frac{2GMa^2 r \sin^2 \theta}{c^2 \Sigma} \right) \sin^2 \theta d\varphi^2 = 0$$

avec  $G$  constante gravitationnelle,  $c$  vitesse de la lumière dans le vide et  $(ct, r, \theta, \varphi)$  coordonnées de Boyer-Lindquist

$M$  masse du trou noir,  $a = \frac{J}{cM}$  avec  $J$  moment cinétique du trou noir,  $\Delta = r^2 - \frac{2GM}{c^2} r + a^2$  et  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$

Conservation de  $\varepsilon$  (énergie du photon),  $l_z$  (composante du moment cinétique  $l$  du photon sur l'axe de rotation du trou noir) et  $Q$  (constante de Carter) soit avec  $m = \frac{GM}{c^2}$  et  $\lambda$  un paramètre affine, les 4 équations paramétriques :

$$\left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = \left( (r^2 + a^2 - c \frac{l_z}{\varepsilon})^2 - \Delta \left( (a - c \frac{l_z}{\varepsilon})^2 + c^2 \frac{Q}{\varepsilon^2} \right) \right) \frac{\varepsilon^2}{c^2 \Sigma^2}$$

$$\left( \frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 = \left( c^2 \frac{Q}{\varepsilon^2} + \cos^2 \theta \left( a^2 - c^2 \frac{l_z^2}{\varepsilon^2 \sin^2 \theta} \right) \right) \frac{\varepsilon^2}{c^2 \Sigma^2}$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = (2mar + (\Sigma - 2mr)c \frac{l_z}{\varepsilon \sin^2 \theta}) \frac{\varepsilon}{c \Delta \Sigma}$$

$$\frac{cdt}{d\lambda} = ((r^2 + a^2)^2 - 2marc \frac{l_z}{\varepsilon} - \Delta a^2 \sin^2 \theta) \frac{\varepsilon}{c \Delta \Sigma}$$

Trajectoires des photons à proximité des trous noirs

# RELATIVITÉ GÉNÉRALE – SYMÉTRIE AXIALE (KERR)

Les coordonnées radiales constantes  $\bar{r}_c$  (« sphères » de photons) peuvent s'obtenir en écrivant :

$$p(\bar{r}) = \bar{r}^6 - 6\bar{r}^5 + (9 + 2\nu u)\bar{r}^4 - 4u\bar{r}^3 - \nu u(6 - u)\bar{r}^2 + 2\nu u^2\bar{r} + \nu u^2 = 0, \text{ ou bien}$$

$$q(\bar{r}) = \bar{r}^5 - 3\bar{r}^4 + 2\nu u\bar{r}^3 - 2u\bar{r}^2 + \nu u^2\bar{r} + \nu u^2 + 2\bar{a} \cos i \bar{r} \sqrt{3\bar{r}^4 + (1 - 3\nu)u\bar{r}^2 - \nu u^2} = 0$$

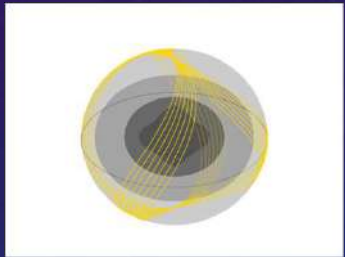
avec  $\bar{r} = \frac{r}{m}$ ,  $\bar{a} = \frac{a}{m}$ ,  $u = \bar{a}^2$  et  $\nu = \sin^2 i$ , et  $i$  angle constant d'inclinaison du moment cinétique  $l$  du photon

$$(l_z = l \cos i, Q = l^2 \sin^2 i \text{ et } l^2 = l_z^2 + Q)$$

$$\text{Pour une valeur } \bar{r}_c, \frac{cl_z}{m\varepsilon} = \frac{(\bar{r}_c^3 - 3\bar{r}_c^2 + \bar{a}^2\bar{r}_c + \bar{a}^2)}{\bar{a}(\bar{r}_c - 1)} \text{ et } \frac{c^2 Q}{m^2 \varepsilon^2} = -\frac{\bar{r}_c^3(\bar{r}_c^3 - 6\bar{r}_c^2 + 9\bar{r}_c - 4\bar{a}^2)}{\bar{a}^2(\bar{r}_c - 1)^2}$$

ce qui permet d'intégrer les 3 équations paramétriques non nulles  $\frac{d\theta}{d\lambda}$ ,  $\frac{d\varphi}{d\lambda}$  et  $\frac{cdt}{d\lambda}$  et de tracer les trajectoires :

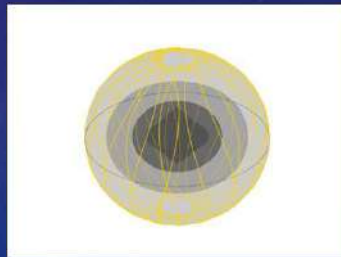
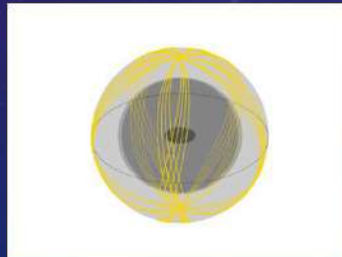
$$x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \varphi, y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \varphi \text{ et } z = r \cos \theta$$



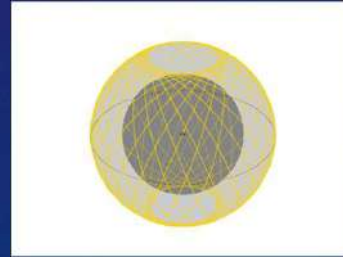
orbite polaire  $\bar{a} = 1 \quad cl_z/m\varepsilon = 0$



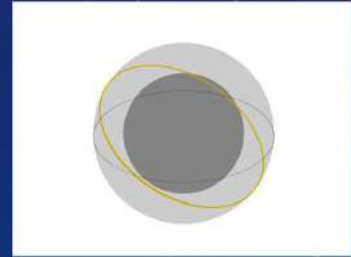
$\bar{a} = 0,5 \quad cl_z/m\varepsilon = 0$



$\bar{a} = 1 \quad cl_z/m\varepsilon = -1$



$\bar{a} = 0,1 \quad cl_z/m\varepsilon = -2$

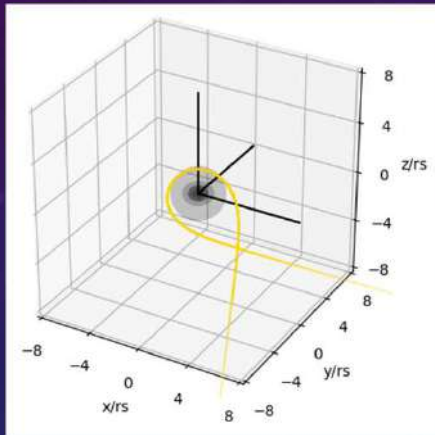


$\bar{a} = 0 \quad cl/m\varepsilon = \sqrt{27}$

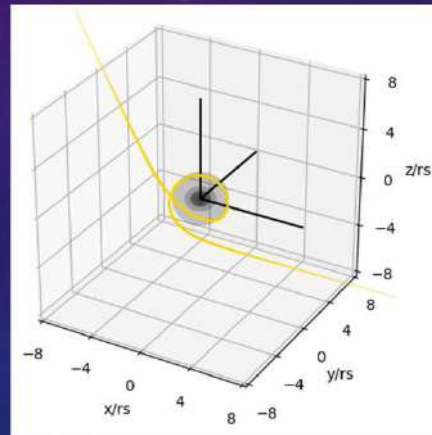
Trajectoires des photons à proximité des trous noirs

# RELATIVITÉ GÉNÉRALE – SYMÉTRIE AXIALE (KERR)

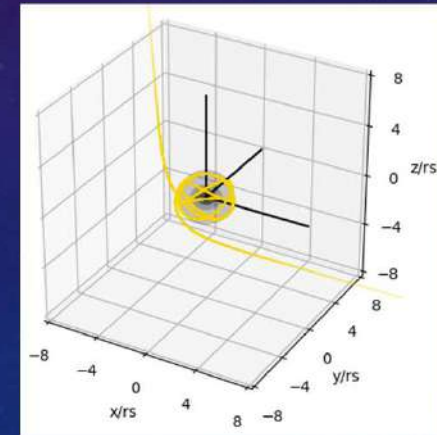
Exemples de trajectoires de photons arrivant de l'infini sur un trou noir de Kerr extrême ( $\bar{a} = 1$ )



$$cl_z/m\varepsilon \approx -6,015 \frac{c^2 Q}{m^2 \varepsilon^2} \approx 9,677$$



$$cl_z/m\varepsilon \approx -6 \frac{c^2 Q}{m^2 \varepsilon^2} \approx 9,629$$



$$cl_z/m\varepsilon \approx -6 \frac{c^2 Q}{m^2 \varepsilon^2} \approx 9,627$$

Trajectoires des photons à proximité des trous noirs



# OUTILS UTILISÉS

- Programmation Python : calcul numérique avec module numpy, tracés 3D avec modules math et matplotlib.pyplot
- Tableur excel pour vérification du calcul et tracés 2D
- Méthode Runge-Kutta ordre 4 :
  - double intégration pour  $\frac{d^2u}{d\varphi^2}$  (Schwarzschild), à pas constant ou adaptatif
  - intégration simple pour les équations paramétriques (Kerr), à pas affine constant ou adaptatif, ou intégration simple des dérivées temporelles (Kerr), à pas de temps constant
- Bibliographie :
  - Relativité générale M2 – Observatoire de Paris – Ericourgoulhon  
<https://luth.obspm.fr/~luthier/gourgoulhon/fr/master/relatM2.pdf>
  - Spherical orbits around a Kerr black hole – National University of Singapore – Edward Teo  
<https://phyweb.physics.nus.edu.sg/~phyteoe/kerr/paper.pdf>
  - Exact formulas for spherical photon orbits around Kerr black holes – Middle East Technical University – Turkey  
Aydin Tavlayan and Bayram Tekin <https://arxiv.org/pdf/2009.07012.pdf>
  - Spherical null geodesics of rotating Kerr black holes – The Ruppin Academic Center and The Hadassah Institute – Israel  
Shahar Hod <https://arxiv.org/abs/1210.2486>
  - Geodesic motion in Kerr space time – Istituto Nazionale di Fisica Nucleare di Roma – Italia  
[https://www.roma1.infn.it/teongrav/onde19\\_20/geodetiche\\_Kerr.pdf](https://www.roma1.infn.it/teongrav/onde19_20/geodetiche_Kerr.pdf)
- Conférence de R. Kerr <https://www.youtube.com/watch?v=nypav68tq8Q>

Trajectoires des photons à proximité des trous noirs



# CONCLUSION

<https://site.nicolasfleury.ovh/>

Trajectoires des photons à proximité des trous noirs